Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 - Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Alonso Ruiz (airuiz@uc.cl)

Ayudantía 23

Problema 1

Considere el circuito que se muestra en la figura 1. Encuentre las corrientes I_1, I_2 y la carga Q_2 en el condensador si en $t = 0$ se cierra el interruptor y el condensador esta descargado inicialmente (I_1 pasa por R_1 e I_2 pasa por R_2).

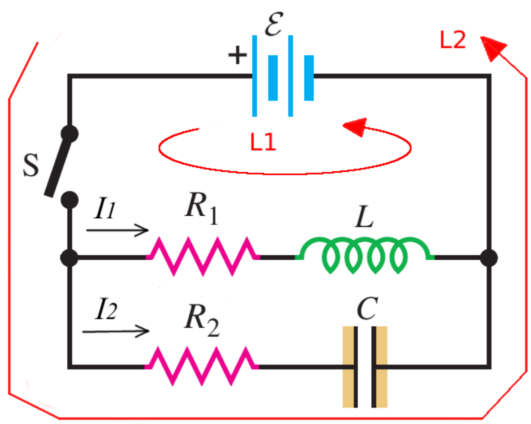


Figura 1:

Solución

Aplicando la LVK a los loops $L1$ y $L2$ se tiene:

$$L1: \quad \varepsilon - I_1 R_1 - L\frac{dI_1}{dt} = 0 \tag{1}$$

$$L2: \quad \varepsilon - I_2 R_2 - \frac{Q_2}{C} = 0 \tag{2}$$

La ecuación (1) se puede ordenar de la siguiente forma:

$$-\frac{R_1}{L}dt = \frac{1}{I_1 - \varepsilon/R_1}dI_1 \tag{3}$$

Integrando nos da que:

$$I_1(t) = \frac{\varepsilon}{R} + k_0 \exp\left(-\frac{R_1}{L}t\right) \tag{4}$$

Donde k_0 es una constante de integración. Para determinar k_0 usamos que en $t = 0$ la corriente sobre el inductor debe ser 0, ya que de lo contrario se tiene una discontinuidad en I_1 y si hay una discontinuidad en la corriente en $t = 0$ entonces $dI/dt \to \infty$ en $t = 0$ y por lo tanto la energía se hace infinita en (2). Por lo tanto con la condición $I_1(0) = 0$ nos da que $k_0 = -\varepsilon/R_1$, quedando I_1 como:

$$I_1(t) = \frac{\varepsilon}{R_1}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L}t\right)\right] \tag{5}$$

Derivando la ecuación (2) y usando que $I_2 = dQ_2/dt$ ya que el condensador se está cargando, se pueden ordenar un poco los términos de la siguiente forma:

$$\frac{dI_2}{I_2} = -\frac{dt}{R_2 C} \tag{6}$$

Esta ecuación es fácil de integrar, lo que nos da que:

$$I_2(t) = H_0 \exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right) \tag{7}$$

Con H_0 una constante de integración. Para encontrar H_0 usamos el hecho de que el condensador parte descargado, por lo tanto evaluando (2) en $t = 0$ se tiene:

$$\varepsilon + I_2(0)R_2 - \underbrace{\frac{Q_2(0)}{C}}_{=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I_2(0) = \frac{\varepsilon}{R_2} \tag{8}$$

Por lo tanto con esta condición se obtiene que $H_0 = I_2(0)$, con lo que queda que I_2 es:

$$I_2(t) = \frac{\varepsilon}{R_2} \exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right) \tag{9}$$

Finalmente para encontrar Q_2 solo se tiene que integrar I_2 entre 0 y t, esto nos da que:

$$Q_2(t) = \int_0^t \frac{\varepsilon}{R_2} \exp\left(-\frac{t'}{R_2 C}\right) dt' = \varepsilon C \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right)\right] \tag{10}$$

Problema 2

Considere el circuito que se ve en la figura 2. El interruptor S se encuentra inicialmente abierto. Entonces:

a) Encuentre las corrientes I_1, I_2 en función del tiempo si en $t = 0$ se cierra el interruptor S.

b) Encuentre las corrientes I_1, I_2 después de un tiempo infinito. ¿Qué es lo que se observa?

c) Si luego de ese tiempo infinito se abre el interruptor S, encuentre la corriente en el circuito nuevo que se forma.

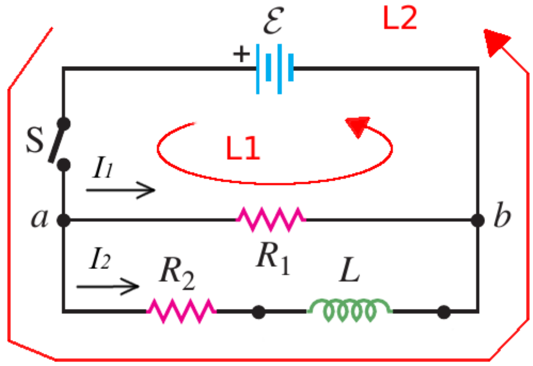


Figura 2:

Solución

a) Aplicando la LVK a los $L1$ y $L2$ se obtiene que:

$$L1: \quad \varepsilon - I_1 R_1 = 0 \tag{11}$$

$$L2: \quad \varepsilon - I_2 R_2 - L\frac{dI_2}{dt} = 0 \tag{12}$$

De (11) se obtiene claramente que:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} = cte \tag{13}$$

Ahora reordenando los términos de (12) se puede escribir como:

$$\frac{dI_2}{I_2 - \varepsilon/R_2} = -\frac{R_2}{L}dt \tag{14}$$

Esto se puede integrar para obtener I_2:

$$I_2(t) = \frac{\varepsilon}{R_2} + k_0 \exp\left(-\frac{R_2}{L}t\right) \tag{15}$$

Dado que I_2 pasa por la inductancia, se debe tener que $I_2(0) = 0$ para que no haya una discontinuidad en la corriente (lo mismo que en el problema 1). Aplicando esta condición da que $k_0 = -\varepsilon/R_2$ e I_2 queda como:

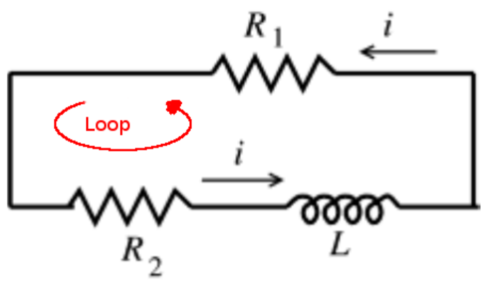
$$I_2(t) = \frac{\varepsilon}{R_2}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_2}{L}t\right)\right] \tag{16}$$

b) Al hacer $t \to \infty$ se tiene que:

$$I_1(t \to \infty) = \frac{\varepsilon}{R_1} \qquad y \qquad I_2(t \to \infty) = \frac{\varepsilon}{R_2} \tag{17}$$

Si tomamos la derivada de I_2 se tiene que $dI_2/dt \propto \exp(-R_2 t/L)$, por lo tanto en un tiempo infinito la corriente I_2, es decir, la corriente que pasa por el inductor no varía y se vuelve estable. Por lo tanto con los valores de las corrientes en (17) nos damos cuenta que se obtiene el mismo resultado que si la bobina no hubiera estado ahí en primer lugar.

c) Cuando se vuelve a abrir el interruptor se tiene el siguiente circuito.



Ahora la corriente que circula proviene de la bobina, que almaceno energía cuando estaba conectada. Si se aplica la LVK a este circuito se tiene que:

$$-I(R_1 + R_2) - L\frac{dL}{dt} = 0 \tag{18}$$

Esta ecuación se puede reordenar para dejarla de la siguiente forma:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{(R_1 + R_2)}{L}dt \tag{19}$$

Integrando se obtiene que:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t\right) \tag{20}$$

La constante I_0 se obtiene del hecho de que como se cerró el interruptor la corriente por el inductor al inicio de este nuevo circuito es $I_2(t \to \infty) = \varepsilon/R_2$, por lo tanto se tiene que $I_0 = \varepsilon/R_2$ y se encuentra finalmente que:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R_2}\exp\left(-\frac{(R_1 + R_2)}{L}t\right) \tag{21}$$

Problema 3

Se tienen 2 cables coaxiales conductores perfectos formados por 2 cascarones cilíndricos por los que circula una corriente I en sentidos opuestos. Si los cilindros están limitados por discos no conductores separados por una distancia h, encuentre la energía magnética y la inductancia propia del sistema.

Solución

Por la ley de Ampère el campo magnético viene dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\hat{\phi} \quad (a < r < b) \qquad ; \qquad \vec{B} = 0 \quad \text{(En otros casos)} \tag{22}$$

Con esto podemos determinar la energía magnética con la siguiente ecuación:

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{B}|^2 d^3x \tag{23}$$

Como solo hay campo entre los cilindros se tiene que la energía magnética va a ser:

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_a^b \left(\frac{\mu_0}{2\pi r}\right)^2 r dr dz d\phi = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{24}$$

Ahora como $U_m = LI^2/2$, entonces la autoinductancia L es:

$$L = \frac{2U_m}{I^2} = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{25}$$

Este ejercicio también se puede hacer al revés, primero calcular la autoinductancia y luego la energía con $U_m = LI^2/2$. Para calcular la autoinductancia usamos el campo en (23) y se usa como superficie un rectángulo paralelo al eje del cilindro y que se encuentra entre a y b y con altura h. Luego se calcula el flujo sobre ese cuadrado, donde el diferencial de superficie es $d\vec{S} = drdz\hat{\phi}$ y se calcula la autoinductancia como $L = \phi/I$.

Problema 4

Considere un resorte de constante elástica k y largo natural l_0. Si por el resorte se hace pasar una corriente I, este se puede considerar como una bobina de N vueltas con sección transversal A. Encontrar cuanto se comprime el resorte y estudie la estabilidad de las soluciones.

Solución

Sobre el resorte actúan 2 fuerzas: la fuerza del resorte y la fuerza debida a la corriente que pasa por el resorte. La fuerza del resorte viene dada por:

$$\vec{F}_r = -k(x - l_0)\hat{x} \tag{26}$$

Para calcular la energía debido a la corriente, se puede obtener a partir de la energía magnética almacenada en la bobina como $\vec{F}_m = -\vec{\nabla}U_m$, con $U_m = LI^2/2$. Para una bobina la autoinductancia viene dada por:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{d} \tag{27}$$

donde A es el área de la sección transversal y d el largo de la bobina. En nuestro caso se va a tener que el largo de la bobina es el que varía, por lo tanto se tiene:

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 A}{x} \quad \Rightarrow \quad U_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2 A}{2x} \tag{28}$$

por lo tanto la fuerza va a ser:

$$\vec{F}_m = -\frac{\partial U_m}{\partial x}\hat{x} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 A}{2x^2}\hat{x} \tag{29}$$

Para calcular cuanto se estira el resorte se necesita que la fuerza del resorte se equilibre con la fuerza magnética, es decir, que $\vec{F}_r = \vec{F}_m$, por lo tanto se tiene:

$$k(x - l_0) + \frac{\mu_0 N^2 I^2 A}{2x^2} = 0 \tag{30}$$

Haciendo $\alpha = \mu_0 N^2 I^2 A/k$ la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\frac{\alpha}{2x^2} + x = l_0 \tag{31}$$

La ecuación anterior nos permite determinar el x del equilibrio, pero desafortunadamente esta es una ecuación cubica. Existe solución analítica para las ecuaciones cubicas, pero son mas complicadas, por lo que en lugar de analizar exactamente las soluciones vamos a analizar el problema de otra forma.

Primero a partir de (31) definamos la función $f(x) = \alpha/(2x) + x$, luego lo que nos indica la ecuación (31) es que queremos encontrar la intersección de la función $f(x)$ con la recta l_0. La forma de la función $f(x)$ se puede ver en la figura 3 en el lado izquierdo, mientras que en el lado derecho se puede ver lo que se quiere hacer.

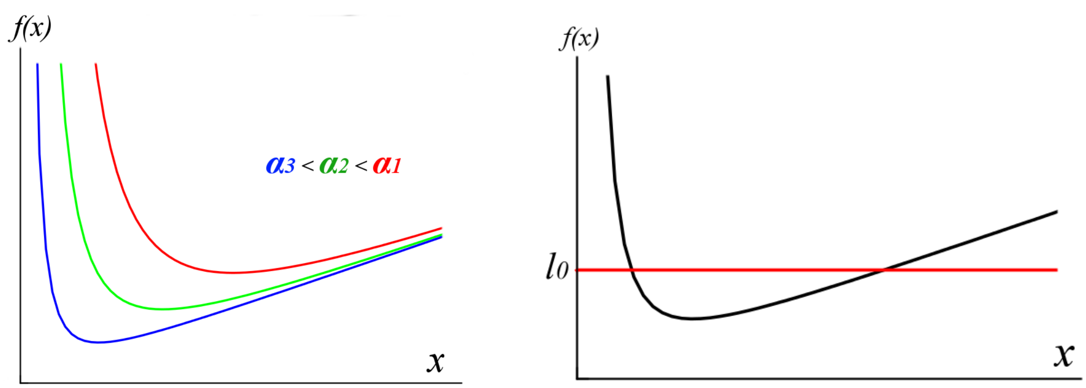


Figura 3:

Como se puede ver de las figuras, la función $f(x)$ tiene un mínimo, el cual se puede encontrar derivando la función e igualando a 0, lo que da que el mínimo es $x_m = \alpha^{1/3}$ y su valor es

$f(x_m) = 3\alpha^{1/3}/2$. Como las intersecciónes de l_0 con $f(x)$ nos dan las soluciones del equilibrio, entonces para que hayan soluciones de equilibrio se necesita que:

$$f(x_m) = \frac{3}{2}\alpha^{1/3} \leq l_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \left(\frac{2}{3}l_0\right)^3 \tag{32}$$

Donde colocamos la condición en términos de α porque α depende de la corriente, que es único parámetro que podemos variar, ya que todos los demás son propiedades del resorte que se eligió, mientras que la corriente la podemos variar, de esta forma podemos escribir la condición para la existencia de puntos de equilibro en términos de la corriente simplemente despejando esta última de α, lo que nos da que:

$$I \leq \left(\frac{2}{3}l_0\right)^{3/2} \left(\frac{k}{\mu_0 N^2 A}\right)^{1/2} = I_c \tag{33}$$

Donde el lado derecho de la desigualdad se definió como I_c, que indica la corriente crítica. Entonces ahora podemos analizar las soluciones. Se tiene los siguientes 3 casos:

1. El primer caso es $I = I_c$. En este caso existe una única solución de equilibrio, en el que l_0 pasa justo por el mínimo de $f(x)$. Por lo tanto el único punto de equilibrio es:

$$x_{eq} = x_m = \alpha^{1/3} \tag{34}$$

2. El segundo caso es $I < I_c$. Ahora se tienen 2 soluciones tal como se ve en la figura 3 en la parte derecha. La primera es $x_- < x_m$ y la segunda es $x_+ > x_m$. El punto x_+ corresponde a un punto de equilibrio estable, mientras que x_- es un punto de equilibrio inestable.

3. El último caso es cuando $I > I_c$. Cuando ocurre esto la recta l_0 queda bajo el mínimo de $f(x)$ y por lo tanto no se tienen puntos de equilibrio.